

# Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

2005

## Volumen 18

Clame

Centro Latinoamericano  
de Matemática Educativa

**ACTA LATINOAMERICANA DE  
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**VOLUMEN 18**

## Comité Latinoamericano de Matemática Educativa CLAME

### Consejo Directivo

Gustavo Martínez Sierra	(Presidente)	<i>presidencia@clame.org.mec</i>
Germán Beitia	Secretario	<i>secretario@clame.org.mec</i>
Joaquín Padovani	Tesorero	<i>tesorero@clame.org.mec</i>
Gisela Montiel Espinosa	Vocal Norteamérica	<i>vocal_norteamerica@clame.org.mec</i>
Juan Raúl Delgado Rubí	Vocal Caribe	<i>vocal_caribe@clame.org.mec</i>
Cecilia Crespo	Vocal Sudamérica	<i>vocal_sudamerica@clame.org.mec</i>

### Consejo Consultivo

Egberto Agard	<i>eagard@sinfo.net</i>
Ricardo Cantoral	<i>rcantoral@cinvestav.mex</i>
Fernando Cajas	<i>fercajas@hotmail.com</i>
Guadalupe de Castillo	<i>guadalupe@cup.net.pa</i>
Evarista Matías	<i>carmen.matiass@codetel.net.do</i>
Teresita Peralta	<i>tperalta@cariari.ucr.ac.cr</i>

### Comisión de Admisión

Francisco Cordero	<i>fcordero@cinvestav.mex</i>
Analida Ardila	<i>analidaardila@cableonda.net</i>
Victor Martínez	<i>victor@bilbo.edu.ny</i>

### Comisión de Promoción Académica

Javier Lezama	<i>jlezama@ipn.mex</i>
Edison de Faria	<i>edefaria@cariari.ucr.ac.cr</i>
Yolanda Serres	<i>serresy@uav.ie</i>
Leonora Díaz	<i>leonoradi@netup.cl</i>
Mayra Castillo	<i>mayracastillo@hotmail.com</i>
Uldarico Malaspina	<i>umalasp@pucp.edu.pe</i>

# ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

VOLUMEN 18

Editores

Javier Lezama

*Cicata-IPN*

Mario Sánchez

*Cicata-IPN*

Juan Gabriel Molina

*Cicata-IPN*

Editores Asociados

Apolo Castañeda, Cecilia Crespo, Lorenzo Contreras, Mario García,  
Elizabeth Mariscal, Gustavo Martínez, Gisela Montiel, Alejandro Rosas.

Colaboración Técnica

Janet Ramírez, Allan de la Cruz.

Diseño

Patricia Sánchez

Derechos Reservados

® COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA A.C.

CMM-040505-IC7

Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente.

ISBN: 970-9971-00-X

Digitalizado en México/Junio de 2005



# Tabla de Contenidos

Presentación <i>Comisión Académica del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 2005</i>	xvii
CATEGORÍA 1: ANÁLISIS DEL CURRÍCULUM Y PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS	1
Introducción	3
Tránsito entre Representaciones en Matemáticas ¿Pensamiento Global o Local? <i>Juan Alberto Acosta</i>	5
Preconceptos en el Aprendizaje del Cálculo <i>Martha Alvarado y Carlos García</i>	11
Papel de la Teoría de Conjuntos en la Construcción de los Números Naturales <i>Mario J. Arribebe</i>	19
Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria <i>Carmen Batanero</i>	27
Sistemas Sintéticos. Lo Inteligible en los Manuales para la Enseñanza <i>Alberto Camacho</i>	35
La Metodología de la Verosimilitud Empírica <i>Gonzalo Delgado</i>	43
Educación de Adultos ¿Saberes Matemáticos Previos o Saberes Previos a los Matemáticos? <i>María Fernanda Delprato</i>	51
Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Matemáticas <i>Edith Dubon</i>	57
Qué Ideas Tienen los Estudiantes Acerca de su Comprensión: Un Estudio Transversal <i>Inés Elchiribebety y María Rita Otero</i>	63

Enseñanza y Comprensión del Enfoque Frecuencial de la Probabilidad en Segundo Grado de Secundaria <i>Saúl Elizarraras</i>	71
Un Marco para la Evaluación de la Estadística en Ingeniería <i>Daniel Fernández y Mónica Guitart</i>	79
La Resolución de Problemas como Herramienta de Diagnóstico del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en Educación Diversificada y Profesional <i>Thairo Figueroa y Mario Arrieché</i>	87
Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza <i>María Rey Genicio, Graciela Lazarte, Silvia Ponirito y Clarisa Hernández</i>	93
Fractal: Ideas y Percepciones de Estudiantes entre 15 y 17 Años <i>Sabrina Harbin y Miriam Mirales</i>	101
Métodos Participativos, Un Arma Poderosa para el Aprendizaje <i>Yolanda Hernández y Armando de Pedro Lago</i>	109
Concepciones que los Alumnos de Nivel Medio Superior Tienen sobre los Ángulos Negativos y Mayores de $360^\circ$ <i>Rosario Luck, Graciela Valdés, Santiago R. Velázquez y Gustavo Martínez</i>	115
Dificultades de Comprensión de Estocásticos en la Educación Secundaria <i>José Manuel López</i>	123
La Habilidad Ubicación Espacial Matemática, como Habilidad Esencial, en la Visualización Matemática <i>Lilia López, Alfredo Alanís y Olga L. Pérez</i>	131
Convención Didáctica sobre la Demostración Geométrica <i>Efrén Marmolejo y María del Carmen Solano</i>	139
Significados Personales de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería <i>Albéniz A. Meléndez y Mario J. Arrieché</i>	147

Una Propuesta para la Enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria <i>Hermes Nolasco</i>	155
Uso del Conocimiento Estadístico en Egresados de Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional <i>Aracelia Palacios, Cuauhtémoc G. Pérez, Yanelly Arellano, Nancy Hernández, Sonia Villaseñor y Angelina González</i>	161
Plan Estratégico para Mejorar la Eficiencia Terminal en Cursos de Matemáticas <i>Carlos Daniel Prado</i>	169
La Prensa como Medio y Recurso Didáctico en la Resolución de Problemas Matemáticos <i>Ana Guadalupe Quiroga y Olga Lidia Pérez</i>	177
Didáctica de la Probabilidad y Estadística. El Caso de la Variable Aleatoria <i>Blanca R. Ruiz Hernández y José Armando Albert Huerta</i>	185
Algunas Dificultades en la Conversión Gráfico-Algebraica de Situaciones de Vectores <i>José Luis Soto</i>	193
La Mediación...un Factor Fundamental en la Construcción de Aprendizajes Significativos <i>Gloria Subit y Marta Baunahy</i>	201
Razonamiento Probabilístico en Estudiantes del Nivel Superior <i>Manuel Alfredo Urrea</i>	207
El Desarrollo Intelectual y la Resolución de Problemas <i>María del Valle y Eduardo Mardones</i>	215
Enseñanza y Comprensión del Enfoque Clásico de la Probabilidad en Primer Grado de Secundaria <i>Orlando Vázquez</i>	223

El Papel de las Representaciones en el Éxito de la Resolución de Problemas <i>José Luis Villegas, J. Roberto García y Enrique Castro</i>	231
CATEGORÍA 2: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL	239
Introducción	241
Pensamiento Complejo y Educación Matemática Crítica <i>Martín Andonegui</i>	245
Incremento, Diferencial y Aproximación Lineal <i>José Ismael Arros</i>	253
Sistema Para la Gestión, Evaluación y Seguimiento de Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas mediante e-Learning <i>Juan Balazar Cruz</i>	259
Construyendo una Estrategia Metodológica Participativa en el Curso de Geometría del Currículo de Formación del Docente Integrador <i>Rosa Becerra</i>	265
Geometría en Bachillerato <i>Gustavo Bermúdez</i>	273
La Resolución de Problemas como un Medio para la Formación del Concepto de Media Numérica. Primera Parte <i>Otilio Bienvenido Mederos y José Enrique Martínez</i>	281
Razones y Proporciones en la Dinámica Cotidiana <i>Anabelle Castro, Rommel Alturado, Omar Gálvez y Francisco Rodríguez</i>	289
Comparación de la Enseñanza de la Geometría en los Sistemas Escolares Chileno y Francés <i>Corine Castela e Ismenia Gozmán</i>	295



Relación de Futuros Profesores de Matemáticas con la Geometría y sus Tareas <i>Corine Castela e Ismenia Guzmán</i>	303
Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática <i>Cecilia R. Crespo y Christiane C. Ponteville</i>	307
La Geometría en el Arte: Los Vitrales de las Catedrales Góticas <i>Cecilia R. Crespo</i>	313
Geometría para Amar <i>Cristina Ferraris</i>	321
Geometría Dinámica en las Clases de Matemáticas <i>Claudia Flores y Betsabé Adaña Contreras</i>	327
Prácticas Ostensivas en la Enseñanza de la Matemática <i>Dilma Fregona</i>	335
Desarrollos Matemáticos en Arquitectura <i>María Dolores García y José Armando Albert</i>	341
Conflictos Epistémicos en un Proceso de Estudio de la Noción de Función. Implicaciones para la Formación de Profesores <i>Juan D. Godino, Miguel R. Wilhelmi y Deña Bencomo</i>	349
Significados Institucionales y Personales de las Fracciones en Educación Básica <i>Juvary González y Mario Arrieché</i>	357
Análisis del Desarrollo de la Puesta en Escena de una Situación Didáctica "La Función Exponencial $2x$ " con Estudiantes de Bachillerato <i>Jorge López y Javier Lezama</i>	363

La Educación Matemática: Una Aproximación a su Comprensión desde una Visión Interdisciplinar <i>Andrés Moya</i>	369
El uso Inadecuado de Conceptos Matemáticos en las Escuelas de Ingeniería <i>Alejandro Muñoz</i>	377
Concepciones Dominantes en la Enseñanza del Concepto de Número Entero en Estudiantes de Formación Inicial <i>Hugo Parra</i>	385
Transferencia de Resultados: Taller con Docentes de Escuela Media <i>Josefina Rojo, Celia Torres, Edna Agustini, Ana Lasserre y Mercedes Naraskevicius</i>	391
Una Propuesta para Reconstruir el Saber Didáctico y Matemático en un Curso de Actualización Docente <i>Yokanda Serres</i>	399
Diseño de Gráficas a partir de Actividades de Modelación <i>Liliana Suárez, Carolina Carrillo y José Iván López</i>	405
Desarrollo de Habilidades del Pensamiento en Forma de Conceptos <i>Tania Toledo y Violeta Fernández</i>	411
El Desarrollo de Habilidades Matemáticas y Actividades Matemáticas Universales. Sus Implicaciones en la Formación de Profesores <i>Santiago Ramiro Velázquez</i>	417
Concepciones de los Docentes sobre la Matemática. Su Incidencia en la Enseñanza y el Aprendizaje <i>Silvia Vilanova, M. Cristina Rocerau, Perla Medina, Mercedes Astiz, María Oliver, Susana Vecino y Guillermo Valdez</i>	425

CATEGORÍA 3: CONSIDERACIÓN DE ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR	431
Introducción	433
Un Estudio del Teorema Fundamental del Cálculo en el Contexto Área Bajo la Curva <i>María Antonieta Aguilar</i>	437
Una Alternativa para la Construcción Aritmética-Algebraica de las Convenciones Matemáticas Presentes en los Exponentes <i>Raúl Antonio y Gustavo Martínez</i>	445
Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico <i>Gabriela Buendía</i>	451
La Noción de Conservación en el Estudio del Área <i>Ma. Guadalupe Cabañas</i>	457
Socioepistemología de la Predicción <i>Ricardo Cantoral, Juan Gabriel Molina y Mario Sánchez</i>	463
Mecanismos para la Difusión del Discurso Matemático Escolar <i>Apolo Castañeda</i>	469
La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar <i>Francisco Cordero</i>	477
La Significación Física de la Integral a Partir de la Modelación de Fenómenos <i>Gildardo Cortés</i>	483
El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico <i>Rosa María Farfán y Mario A. García</i>	489
El Uso de las Gráficas en los Libros de Texto <i>Rebeca Flores y Francisco Cordero</i>	495

Modelación de la Evolución de la Levadura: Un Estudio de las Prácticas Sociales del Ingeniero Bioquímico <i>Adriana Galicia y Jaime Arrieta</i>	503
¿Son las Prácticas Sociales Fundamento para la Democratización de la Matemática? <i>Carlos García</i>	511
La Construcción Social de la Noción de Variable <i>Enrique Javier Gómez, Crisólogo Dolores y Gustavo Martínez</i>	517
Contrastes Epistemológicos del Binomio de Newton y la Serie de Taylor en Dos Variables en los Fenómenos Físicos <i>Hipólito Hernández</i>	523
Los Logaritmos a Partir de la Covariación de Sucesiones <i>Marisol Hernández y Marcela Ferrari</i>	531
Las Prácticas Sociales de Modelación y la Emergencia de lo Exponencial <i>Miguel Ángel Hernández y Jaime Arrieta</i>	537
Entorno Sociocultural y Cultura Matemática en Profesores del Nivel Superior de Educación: Estudio de Caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una Aproximación Socioepistemológica <i>Javier Lezama y Luz María Mingüer</i>	543
La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748) <i>Renata Ivonne López y Marcela Ferrari</i>	551
Continuidad y Ruptura de Significados en el Tratamiento Escolar de los Exponentes <i>Gustavo Martínez</i>	559
Los Procesos de Convención Matemática como Constituyentes en la Construcción Social de la Matemática de la Variación y el Cambio <i>Gustavo Martínez</i>	567

Las Prácticas Sociales de Modelación Multilineal de Fenómenos en el Aula <i>Maria Esther Magali Méndez y Jaime L. Arrieta</i>	575
Simulación de la Evolución: Una Práctica Social Bajo el Marco Cooperativo <i>Esther Moreno, Jaime Arrieta, Efrén Marmolejo, Leonora Díaz y Joaquín Padovani</i>	583
Naturaleza de un Campo Conceptual del Cálculo Infinitesimal: Una Visión Epistemológica <i>Germán Muñoz</i>	589
Dialéctica Entre lo Conceptual y lo Algorítmico Relativa a Prácticas Sociales con Cálculo Integral <i>Germán Muñoz</i>	597
¿Cómo Trabajar los Límites Especiales $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ ? <i>Catalina Navarro y Ricardo Cantoral</i>	605
A Través de lo Periódico, el Sol y las Estrellas son mi Reloj <i>Hipólita Patricio, Carlos A. García y Jaime L. Arrieta</i>	613
Las Prácticas de Hacer Semejanzas en los Triángulos y la Emergencia de las Razones Trigonométricas <i>Hipólita Patricio, Carlos A. García y Jaime L. Arrieta</i>	619
El Tratamiento de Fenómenos Físicos para Aprender Matemáticas <i>Perick Ramírez y Gildardo Cortés</i>	625
Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía <i>Saúl Ezequiel Ramos</i>	631
Modelación en Matemática Educativa <i>Liliana Suárez y Francisco Cordero</i>	639

La Modelación y las Gráficas en Situaciones de Movimiento con Tecnología <i>Arauceli Torres y Liliana Suárez</i>	645
CATEGORÍA 4: EDUCACIÓN A DISTANCIA Y EMPLEO DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	651
Introducción	653
Educación a Distancia: Una Experiencia para el Ingreso en la FRBB <i>Mónica García, Gustavo Escobar, Gloria Subit, Marta Vidal, Martín De Luca, Carlos Frank y Eduardo Bambill</i>	655
Visión Estudiantil de la Recta y Continuidad <i>Carlos García y Martha Alvarado</i>	659
Una Caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual <i>Gisela Montiel</i>	667
Ambiente Virtual con Soporte en la Multimedia y el Software Mathcad para el Aprendizaje de la Teoría de Polinomios <i>Rafael Pantoja y Ricardo Ulloa</i>	673
La Enseñanza del Concepto de Número Real en Ambientes Virtuales Interactivos <i>Nazly E. Salas y Harold Castillo</i>	681
Un Estudio sobre Interacciones y Comunicación en Educación Matemática a Distancia <i>Mario Sánchez y Rosa María Farfán</i>	687
El Uso de las Nuevas Tecnologías de la Información en la Enseñanza de las Matemáticas <i>Dario Santiago y Lourdes Quezada</i>	693
Tendencias Actuales en la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas y la Utilización de las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la Educación <i>Yanet Villanueva</i>	701

CATEGORÍA 5: USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	707
Introducción	709
Un Proceso de Actualización Integral de Profesores de Matemáticas en el Uso Didáctico de los Sistemas de Cómputo Simbólico: Resultados Preliminares y Reflexiones <i>Ana Guadalupe del Castillo, José Ramón Jiménez, Enrique Hugues y Lucía Guadalupe Dórame</i>	711
Determinación de Raíces de Ecuaciones utilizando la Calculadora Gráfica como Medio de Enseñanza y Aprendizaje <i>Esther Ansola y Eugenio Carlos</i>	717
El Uso de la Calculadora Gráfica en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria <i>Eugenia Apreza y Santiago Ramiro Velázquez</i>	723
El Computador en la Clase de Matemáticas: Desde lo Dinámico y lo Semiótico <i>Walter F. Castro y Hugo F. Pardo</i>	727
Algunos Usos de la Computadora en el Aula <i>Armando Cuevas y Magally Martínez</i>	733
Un Acercamiento Alternativo al Cálculo Diferencial <i>Carlos Armando Cuevas y Hugo Rogelio Mejía</i>	741
Matemáticas y Nuevas Tecnologías en Costa Rica <i>Edison De Faria</i>	749
Uso de Hojas Electrónicas en la Enseñanza de la Distribución Normal <i>Enrique Hugues</i>	757
La Construcción de la Prueba Geométrica en un Ambiente de Geometría Dinámica en Secundaria <i>Victor Larios</i>	765
Enseñanza del Cálculo con Animaciones <i>José Roberto Mandujano</i>	771
Aplicabilidad Pedagógica de las Macros (Cabri II) en la Enseñanza de la Geometría <i>Eduardo Mardones y Andrés Ortiz</i>	779

Laboratorio Virtual de Matemáticas <i>Emir Martínez, Jaime L. Arrieta y Antonio Camil</i>	785
Un Software Asistente de Geometría y Una Visualización Dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo <i>Rafael A. Meza</i>	791
La Calculadora Gráfica Como Recurso Didáctico en el Aprendizaje del Cálculo de Integrales Dobles <i>Eugenio Carlos y Leonor Fernández</i>	799
ADENDA	806
Importancia del Análisis del Discurso en el Aula para la Investigación Educativa <i>Antonia Candela</i>	807
Los Usos Sociales de la Matemática en las Ciencias Prácticas de la Cultura Maya: Un Estudio Socioepistemológico <i>Ricardo Cantoral y Otilia Covián</i>	813
Tecnologías de Información y Comunicación en el Postgrado de Enseñanza de la Matemática. Caso UNEG. <i>Sandra L. Castillo</i>	819
Importancia en Matemática Educativa, de la Interrelación entre la Teoría Matemática, Técnicas Modernas de Cómputo y Problemas del Contexto Empresarial para Motivar a Docentes y Estudiantes <i>De las Mercedes Cribeiro Josefina</i>	825
Incoherencias y Pensamiento Matemático: La Influencia de los Lenguajes Matemáticos y Representaciones sobre el Razonamiento en el Dominio del Infinito <i>Sabrina Harbin</i>	833
Ingeniería Didáctica en Física-Matemática <i>María J. Marcolini</i>	841
Perspectivas Curriculares y Uso Didáctico de la Modelación en Educación Matemática Victor Martínez y José Ortiz	847
¿Se pueden crear Matemáticas desde la Didáctica de la Matemática? <i>Tomás Ortega</i>	853
Sobre la Enseñanza de Límites Usando Calculadoras Gráficas <i>Antonio R. Quezada</i>	859



Resignificación del ph por Medio de la Covariación de Progresiones Geométricas y Progresiones Aritméticas <i>Miguel Romero y Marvela Ferrari</i>	867
Análisis Gráfico de funciones <i>María del Socorro Valero</i>	873

# La Habilidad Ubicación Espacial Matemática, como Habilidad Esencial, en la Visualización Matemática

Lilia López, Alfredo Alanís y Olga L. Pérez  
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UANL  
México

lilia\_lopez@hotmail.com  
Visualización — Nivel Superior

## Resumen

Se investiga el desarrollo de la Habilidad Ubicación Espacial Matemática (HUEM) y la Habilidad de Transferencia entre Registros del Sistema Semiótico de Conceptos Matemáticos como habilidades componentes de la Visualización Matemática Tridimensional. Se analiza en la relación dialéctica conocimientos-habilidades del Pensamiento Geométrico, a la habilidad de identificar, comprender y comunicar relaciones de posición en el espacio sensible y en el espacio modelado (curvas, superficies y sólidos, ubicados en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ). Con base en la Teoría de la Actividad y Validaciones Didácticas, se identificó el deficiente desarrollo de la HUEM en estudiantes de Licenciatura en Física y Matemáticas, cuando se requiere de puntos de referencia no fijos y no observables.

## Introducción

Es común hablar de la Geometría en función de las etimologías como “medición de la tierra”, de la concepción Pitagórica como “Ciencia del espacio, arte práctico y ciencia obtenida por observación” o de Los Elementos de Euclides como “Ciencia contemplativa y descripción de formas y figuras de la cantidad continua que muestra las propiedades de las figuras (líneas, superficies y cuerpos)”. Actualmente, se reconoce a la Geometría por su carácter formativo, como fuente de problemas y como medio para la articulación de problemas entre diferentes niveles de enseñanza. A la vez que, se enseña e investiga en el nivel superior, como *Ciencia Pura* (Geometrías Euclidianas y no Euclidianas). El presente trabajo, forma parte de una investigación mas completa sobre el *Desarrollo de Habilidad de Ubicación Espacial Matemática (HUEM), como Habilidad Esencial en la Visualización Matemática Tridimensional*, requerida en la solución de problemas de matemáticas de nivel superior y del ejercicio profesional. Coincidimos con Crowley M (1987), quien afirma que el Modelo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele constituye una guía para la instrucción y evaluación de *habilidades geométricas* en los alumnos y lo consideramos como una relevante contribución al PEA de la Geometría Tridimensional, concebida como la Geometría que estudia a las *relaciones cualitativas y cuantitativas de las formas espaciales volumétricas, desde las nociones espaciales iniciales hasta la geometría Analítica del Espacio* y su relevancia en la Matemática de Nivel Superior.

## Desarrollo

### 1. Visualización Matemática

De la investigación bibliográfica, respecto a las concepciones de visualización encontramos que a partir del Modelo Van Hiele se concibe a la Visualización como el Nivel 0 (o básico), en el que los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos y los conceptos geométricos se ven como entidades totales. Pero En particular, Duval R.(1999b) analizó diferencias radicales entre *Visión Humana* (percepción de objetos físicos), *Visión* (visualización icónica espontánea) y *Tipos de Visualización*, afirmando que para *Ver en Matemáticas*, “la visualización 3D/2D es una representación que, a diferencia de la percepción, no se desarrolla en el espacio real en 3D, sino que se proyecta sobre una superficie en 2D (roca, papel, pantalla electrónica...), no es una maqueta 3D/3D, pero se visualiza la profundidad propia de la percepción visual, gracias al surgimiento de la perspectiva”. Apoyándonos en las concepciones de Zimmermann & Cunningham (1990), De Guzmán, M.(1996) y de Duval R.(1999b), arribamos a la siguiente concepción: *La Visualización Matemática*, no es una visión inmediata, es un camino de codificación y decodificación de objetos matemáticos abstractos (ideas, conceptos y métodos de las matemáticas), que presentan una gran riqueza de contenidos visuales (imágenes mentales, o a lápiz y papel o con la ayuda de tecnología), representables geoméricamente en un sistema coordenado, para la solución de problemas. Respecto a la formación y desarrollo de habilidades matemáticas, consideramos a la Visualización como una habilidad profesional, coincidiendo con Fariñas,G.1995, en Velásquez, B. et al (2001), quien afirma que *Comprender, Visualizar y Comunicar*, son Habilidades Matemáticas (HM), de carácter integrador, que se desarrollan en la solución de problemas en la actividad matemática y en diversas esferas de la vida. En el marco de la Ingeniería Didáctica (Brousseau,1980), las representaciones geométricas, constituyen al *registro geométrico* del Sistema Semiótico de los conceptos, por lo que es fundamental el desarrollo de la habilidad de visualización matemática en la solución de problemas.

### 2. Sistema de Habilidades de la Visualización

De experiencias didácticas realizadas en diferentes niveles académicos, identificamos como *habilidades componentes* de la Visualización Matemática a *la Habilidad de Transferencia y la Habilidad de Ubicación Espacial Matemática*. Respecto a la *habilidad de transferencia* en el sistema semiótico de conceptos matemáticos, hacemos referencia, tanto al *pensamiento visual* en el *pensamiento matemático* en términos de imágenes mentales, como a la cita de Hilbert en Rey Pastor (1977) “los signos y fórmulas de la aritmética son figuras escritas, y las figuras geométricas son fórmulas dibujadas, ningún matemático podría prescindir de éstas fórmulas dibujadas, así como no podría realizar cálculos sin paréntesis ni signos operativos”; e implementamos estrategias del “El curriculum basado en el Modelo de la Representación Triple (TRM)”, enunciada por Schwartz. Dreyfus & Bruckheimer (1990) en el cual, la Transferencia parte de una *Situación Real* hacia una *Representación numérica*, o hacia una *Representación algebraica*, o hacia una *Representación geométrica* y viceversa ... y está basado en la resolución de problemas incluyendo *transferencia entre representaciones*.

Concebimos como una de las habilidades elementales de la HUEM, a la *habilidad de representar*, definida en la Geometría Descriptiva y en el aporte teórico de Álvarez García J. (2001), quien define a la habilidad de *representación gráfica* como *proceso* y como *macrohabilidad*, para la



formación del arquitecto. Pero el objetivo en programas de Arquitectura o Dibujo Industrial, es analizar propiedades de los Sistemas de Proyección con *punto al infinito* o *propio* y desarrollar la habilidad de trazar y/o analizar Intersecciones, Paralelismo o Perpendicularidad entre rectas o entre planos, sin considerar *Sistemas coordenados*. Desarrollar la habilidad de transferencia de las percepciones tridimensionales a representaciones bidimensionales y viceversa, forma parte de la formación básica exigida en el nivel universitario. Pero, en La Geometría Analítica del Espacio, en la Geometría Diferencial, en el Cálculo de dos variables, en el Cálculo Vectorial y la Matemática que requiera de gráficos en el sistema coordenado tridimensional, las *referencias espaciales* deben darse en relación a las siguientes *lateralidades definidas para el nivel superior*: “Arriba – abajo del piso”(del plano coordenado  $Z=0$ ), “Al frente – atrás del plano  $X=0$ ” o “A la derecha – izquierda del plano  $Y=0$ ”. Por lo tanto, en la presente investigación se concibe a la *visualización matemática tridimensional* como la habilidad de codificar un objeto volumétrico de 3D para modelarlo, representarlo y ubicarlo en un sistema coordenado tridimensional en 2D o viceversa (decodificarlo).

### **3. Habilidad Ubicación Espacial Matemática (HUEM)**

Del análisis curricular sobre temas de Geometría, en libros de texto de Primaria y Secundaria en los Programas oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP), México, se identificó que: una primer etapa de la *Habilidad de Ubicación Espacial* (en el Plano), se debe desarrollar en 1° y 2° grado, con actividades para ubicar a su persona y objetos en el entorno, en mapas sencillos y en dibujos sobre hojas planas con “dos “pares de referencia”. Como una segunda etapa, en 3° y 4° grado se trabajan “tres pares de referencia” en mapas y dibujos con las nociones iniciales del sistema coordenado bidimensional, en términos de cuatro puntos cardinales. Saiz,I (1998) constató dificultades conceptuales presentes en 2° y 3° grado, al identificar las lateralidades del objeto y transferir las del sujeto. Pero, a partir de 5° y 6° grado y en Secundaria, ya no se define explícitamente el objetivo de desarrollar la habilidad de ubicación espacial y se trabajan propiedades, fórmulas y construcciones de sólidos básicos. En Programas del Nivel Medio Superior, se incluyen conceptos y gráficas de funciones lineales y cuadráticas, en el Sistema coordenado bidimensional, pero se adolece de estrategias didácticas que contribuyan al desarrollo de la habilidad de ubicación espacial tridimensional. Acuña C. (2001), investigó en grupos de bachillerato, sobre la localización de puntos y regiones en el plano a partir de ecuaciones o signos de las componentes de los pares ordenados, pero no hace referencia explícita a la habilidad de ubicación espacial. A través de entrevistas a los docentes de matemáticas de Licenciaturas e Ingenierías de la UANL, México, se identificó que los docentes presuponen que la alfabetización geométrica y la habilidad de visualización tridimensional se desarrollaron en los estudiantes, en niveles educativos precedentes. Pero las experiencias didácticas con los grupos de matemáticas de FCFM, dan cuenta de deficiencias en la relación dialéctica conocimientos-habilidades del pensamiento geométrico para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el Nivel Superior.

A partir del análisis curricular, de la investigación bibliográfica y experiencias didácticas, identificamos tres niveles de desarrollo de la HUEM, con carácter secuencial y de ascenso en la relación dialéctica *conocimientos-habilidades* del Pensamiento Geométrico:

- *Ubicación Espacial*: Es la habilidad del sujeto de controlar (identificar, comprender y comunicar) sus relaciones de posición con el *espacio sensible*. Permite establecer espacialmente la relación objeto-sujeto e identificar las direcciones principales del espacio y de las referencias espaciales. Se basa en una Percepción Espacial bidimensional o tridimensional, a partir de un Punto de referencia (Martínez y Rivaya, pp. 49-65). Se identifican lateralidades del objeto (arriba-abajo, al frente y atrás, a la izquierda y derecha) y se transfieren las del el sujeto (Saiz, I, 1998)
- *Ubicación Espacial Matemática*: Se caracteriza en la relación dialéctica *conocimientos-habilidades del Pensamiento Geométrico*, considerando, la transferencia entre los conocimientos (símbolos, definiciones y propiedades) y la ubicación espacial de objetos (gráficos) en el *espacio modelado* (Sistema coordenado bidimensional o tridimensional).
- *Ubicación y Reubicación Espacial Matemática*: En éste nivel, los objetos tridimensionales deben ser modelados, ubicados e interpretados antes y después de transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones y reflexiones) y/o antes y después de efectuar transformaciones de coordenadas.

#### 4. Implementación de instrumentos semióticos para el desarrollo de la HUEM

Coincidimos con Godino y Flores (1998) respecto a que “un recurso didáctico, es una *situación didáctica integral* ... que en la praxis, no debe desplazar a la expresión matemática”. También estamos de acuerdo con Velásquez, B. et al (2001), quien afirma que las *situaciones didácticas* que se estructuran para promover el desarrollo de la habilidad de comprender, *visualizar* y comunicar, constituyen una forma de integrar las orientaciones didácticas de los diversos Materiales de Apoyo oficialmente establecidos. Por tanto, se concibe la demanda de desarrollar e implementar *instrumentos semióticos* en el PEA de la Geometría, para el desarrollo de la Habilidad de Transferencia entre los registros de Representación de los conceptos. En la actualidad, los gráficos especializados y la Visualización Científica son un soporte para la investigación en el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología. Por lo que la investigación basada en superordenador, es urgente ante las complejas demandas de la globalización, la competitividad e internacionalización de los mercados, el desarrollo vertiginoso de las tecnologías de la comunicación y la abrumadora generación de conocimientos.

Para la Validación Didáctica, se enfrentó al alumno en clase ante la demanda de aplicar la Transferencia entre el Status Objeto y el Status Herramienta en el TRM, por ejemplo:

I. Se pidió modelar matemáticamente al diseño de *dos ductos* que descansan sobre una superficie plana (Fig.1), tales que uno tiene el doble del diámetro del otro, con tareas:

Tarea 1: Representar y Ubicar “de manera adecuada” a los objetos tridimensionales en el sistema coordenado tridimensional. (3D/2D en la hoja de la libreta o en el pizarrón) (Fig.2)  
Tarea 2: Identificar la Ecuación algebraica de cada cilindro, en función de la elección del plano coordenado al que son tangentes. (Transferencia hacia el Registro Algebraico)  
Tarea 3: Parametrizar la curva de intersección y obtener el gráfico de la Curva de Intersección, mediante el uso de Tecnología (Matemática, Derive, Maple o el diseño de algún graficador programado por los mismos estudiantes). (Fig.3) Ver figuras en Anexo.



II. Se aplicó la estrategia de Transferencia entre el *registro simbólico* propio a un software y el *registro geométrico* (Fig. 4) y un cuestionario a un grupo de 25 alumnos de Cálculo Vectorial, el cual, ya cursó Cálculo Diferencial e integral de una variable y cálculo con Geometría Analítica en el Plano y en el Espacio con los siguientes resultados:

**Respuestas de 25 alumnos de Cálculo Vectorial:**

1. ¿EN DÓNDE ESTÁ EL ORIGEN?  
44 % en la esquina del cero, 10% adentro de la caja, 5% no se, 30% intentó pintarlo
2. ¿EN QUÉ OCTANTE ESTÁ ESTA LA GRÁFICA DE LA CURVA EN LA Fig. 2?  
24% no se, hay dos ceros, 44% en el primer octante, 32% en varios
3. ¿LA CURVA ESTÁ ARRIBA DEL PLANO XY?  
24% no se ve el plano xy, no están marcados los ejes coordenados, 44% si, 32% no
4. ¿CUÁL ES LA ORIENTACIÓN POSITIVA DE LA TRAYECTORIA? 48% “anti-horario”
5. ¿EN DÓNDE ESTÁ EL PIE DEL RADIOVECTOR QUE LA GENERA?  
76% en el origen, 24 % en la esquina del cero

### Conclusiones

De realizaciones didácticas análogas, aplicadas a grupos de Matemáticas III y Cálculo Vectorial se constató que: La deficiente Habilidad de Transferencia desde y hacia el registro geométrico de los conceptos para resolver problemas de libros, laboratorios o exámenes, se refleja en la dificultad para *traducir*, mediante el lenguaje científico y coloquial, el registro numérico, el registro algebraico y el registro geométrico, provocando un aprendizaje defectuoso que obstaculiza el aprendizaje significativo.

Se concluye que cuando el estudiante, enfrenta el problema de “ubicar adecuadamente las superficies” para encontrar la curva de intersección, para aplicar Teoremas de Cálculo Vectorial o para definir la dirección que tendría una partícula en un punto fijo o móvil sobre una curva o una superficie, que a su vez está afectada por un campo vectorial, *es esencial la habilidad de ubicación espacial matemática* (del punto, curva o superficie) en la habilidad de reubicación espacial del vector cuyo pie está en dicho punto, para saber si la dirección y sentido de dicha partícula es hacia arriba-abajo, a la izquierda-derecha y/o al frente- atrás de un plano coordenado o un objeto geométrico.

Sumado a la habilidad de estructuración de conceptos elementales y nociones espaciales iniciales, es necesario que en el estudiante se desarrolle o incluso se formen las siguientes habilidades, la habilidad de ubicación espacial física de los objetos, la habilidad de representar objetos en una hoja plana y la habilidad de ubicación espacial en el Plano coordenado, para que en él, se desarrolle (o forme) la habilidad de ubicación espacial en el sistema coordenado tridimensional, como habilidad esencial de la Visualización Matemática Tridimensional, requerida en la solución de problemas de matemáticas de nivel superior y del ejercicio profesional.

## Referencias Bibliográficas

- Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre coordenadas de los puntos del plano artesiano: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(3), 203-217.
- De Guzmán, O. (1998). Visualización Matemática. *Universidad Computense de Madrid, España*. [En Línea] Disponible en: <http://www.oli.org.co/ocivirt/edumat.htm>
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fuentes, H. (2000). Didáctica de la Educación Superior y Dinámica del PDE de la Educación Superior. *Publicación del Centro de estudios "Manuel F Gran" Universidad de Oriente, Santiago, Cuba*.
- Godino, J. D. y Flores, P. (1998). Papeles instrumentales y semióticos de los recursos manipulativos en el estudio de las matemáticas. *Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*, [En Línea] Disponible en <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Saiz, I. (1998). Ubicación espacial en los primeros años de escolaridad: *Educación Matemática* 10(2). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

## ANEXO

Fig. 1

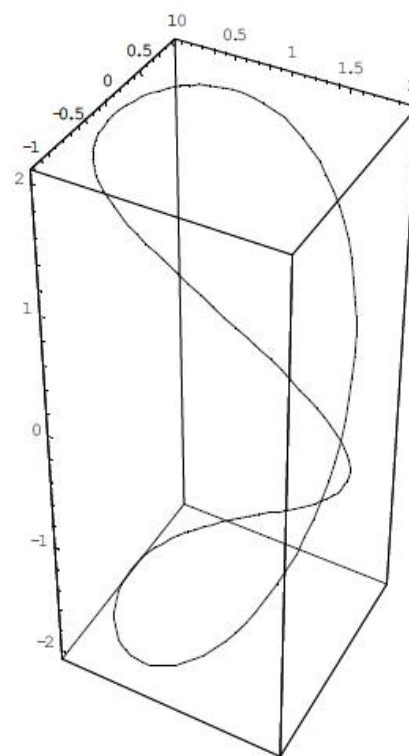
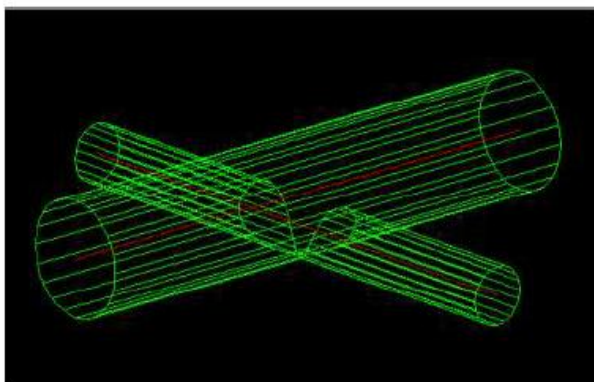
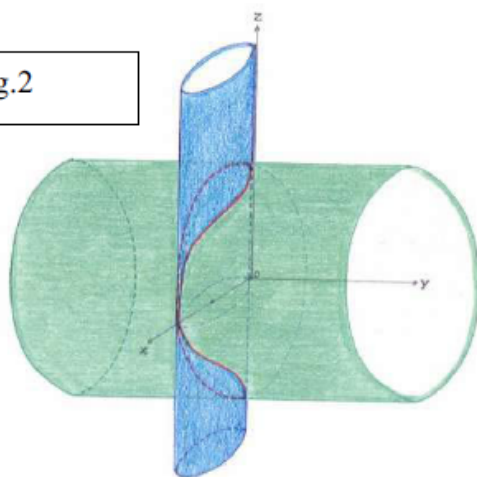


Fig. 3

Fig.2



$$S_1 : x^2 + z^2 = 4 \quad \text{cilindro circular (horizontal).}$$

$$S_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{cilindro circular (vertical).}$$

$$\text{de } S_1 \quad x^2 + z^2 = 4 \quad \begin{aligned} z &= 2 \cos t \\ r &= 2, \quad x = 2 \sin t \end{aligned} \quad \begin{array}{c} x \\ \circlearrowleft \\ z \end{array} \quad \begin{array}{l} t \in [0; 2\pi] \end{array}$$

$$\text{de } S_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \begin{aligned} y &= \pm \sqrt{2x-x^2} \\ x^2 - 2x + y^2 &= 0 \quad y = \pm \sqrt{4 \sin t - 4 \sin^2 t} \end{aligned}$$

$$\therefore R(t) = (2 \sin t)i + (2\sqrt{\sin t - \sin^2 t})j + (2 \cos t)k$$

$$\text{o } R(t) = (2 \sin t)i - (2\sqrt{\sin t - \sin^2 t})j + (2 \cos t)k$$

Fig. 4

